ÉPREUVE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

DURÉE : 4 heures

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTE IMPORTANTE : *Les candidats devront rendre, d'une part, une* ÉPURE *sur feuille de format 42 × 30 sur laquelle figureront en rouge fin les constructions demandées au II 3°, 4°, 5°, 6° et en noir le solide du 7° et, d'autre part, une* COPIE *contenant les parties I, III et IV ainsi que les questions 1°, 2° et 3° (notice) du II.*

À titre indicatif, les questions graphiques compteront pour moitié dans le total prévu.

I. GÉOMÉTRIE PLANE

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe C d'équation polaire $r = a \cos\theta \sin^2\theta$, où $(O, \vec{i})$ est l'axe polaire et a un nombre réel strictement positif.

1° Construire la courbe C, en précisant les points où la tangente est parallèle à $(O, \vec{i})$, puis à $(O, \vec{j})$.

2° Calculer l'aire du domaine intérieur à l'une des boucles de C.

3° Soient quatre points m, n, p, q de C de même abscisse, rangés par ordonnées décroïssantes. Préciser les relations existant entre leurs angles polaires. Déterminer l'ensemble des milieux g de mn et l'ensemble des milieux h de mp quand l'abscisse commune varie. Déduire de ce second ensemble une génération géométrique simple de C.

II. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

L'unité est le centimètre. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ qui, sur la feuille d'épure, est représenté comme suit : l'axe $(O, \vec{i})$ est porté par le grand axe de symétrie, orienté de haut en bas; l'axe $(O, \vec{j})$ par le petit axe, orienté de gauche à droite; la projection frontale de $(O, \vec{k})$ par le grand axe, orienté de bas en haut. On considère les points suivants :

	A	B	Ω	S	F
x	10	13	10	7	13
y	0	− 6	− 6	6	6
z	0	0	0	0	0

(E) est l'ellipse du plan horizontal de centre Ω et de sommets A et B.

(P) est la parabole du plan horizontal de foyer F et de sommet S.

(C_1) est le cylindre de base (E) et de direction (0, 1, 1).

(C_2) est le cylindre de base (P) et de direction (0, − 1, 1).

Γ est l'intersection du cylindre (C_1) et du cylindre (C_2).

Tournez la page S. V. P.

1° Démontrer que la médiatrice de ΩB coupe (E) et (P) en des points où les tangentes sont parallèles ou symétriques par rapport à la direction de $(O, \vec{i})$.

2° Déterminer les plans de bout dont les intersections avec le cylindre (C_1) sont des ellipses qui se projettent horizontalement suivant des cercles.

3° Construire le point M de Γ situé dans le plan $y + z = 12$ et ayant une ordonnée y supérieure à 3. Construire la tangente en M à Γ. Construire les points N, P, Q de Γ de même abscisse que M, rangés par ordonnées décroissantes.

4° Construire le point R de Γ d'ordonnée inférieure à -3 situé sur le contour apparent frontal de (C_1). Construire la tangente en R à Γ.

5° Construire les points V et W de Γ où les tangentes sont respectivement horizontale et de profil, V étant de cote z minimum et W étant d'ordonnée y minimum.

6° Construire le point U de Γ où les deux cylindres ont même plan tangent. U est un point double de Γ : les tangentes en ce point seront précisées au III 4°.

7° Représenter le solide supposé opaque constitué des points intérieurs au cylindre (C_1), extérieurs au cylindre (C_2) et compris entre les deux plans $z = 0$ et $y + z = 24$.

III. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

L'espace de la partie II est désormais rapporté au repère $(U, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, U étant le point double de Γ et $\vec{I} = 3\vec{i}$, $\vec{J} = 3\vec{j}$, $\vec{K} = 3\vec{k}$. On vérifiera qu'ainsi les coordonnées de A sont devenues $X = 1$, $Y = 0$, $Z = -2$.

1° Déterminer, dans ce repère, des équations cartésiennes de (E) et de (P).

2° Déterminer de même des équations cartésiennes des cylindres (C_1) et (C_2).

3° Montrer que Γ est également située sur une quadrique de révolution d'axe $(U, \vec{I})$ que l'on caractérisera.

4° Déterminer les équations cartésiennes des projections γ et γ′ de Γ sur les plans $(U, \vec{I}, \vec{J})$ et $(U, \vec{J}, \vec{K})$. Former une équation de γ en coordonnées polaires d'axe polaire $(U, \vec{I})$. Préciser les tangentes à Γ au point double U.

IV. RETOUR À LA GÉOMÉTRIE PLANE

Grâce à l'identification obtenue au III 4°, déterminer de nouveau, à l'aide des constructions géométriques du II, les ensembles demandés au I 3°.